משפט הינדמן (Hindman's Theorem)

הגדרה: קבוצת סכומים סופיים

יהי , קבוצת הסכומים הסופיים של B יוגדר על ידי:

הגדרה: IP-set

A נקרא IP-set אם"ם כך ש *קיים אינסופי* כך ש- .

משפט הינדמן(Hindman,1974):

יהי טבעי כך שקיימים כך ש- *,*

*אזי לפחות אחד מה* הינו IP-set.

מטרת המאמר – הוכחת משפט הינדמן, נוכיח זאת על ידי אולטרה-פילטרים,שהינם קבוצות של קבוצות מעל מרחב, על ידי הגדרת מרחב של אולטרא פילטרים, שבו נבנה ונמצא קבוצה ש שייכת לה, ובקבוצה זו נבנה IP-set.

נתחיל עם הגדרת פילטרים ואולטרא פילטרים ומשם נעבור לבניית על ידי קומפקטיפציית סטון צ'ך, על ידי שני דברים אלה יהיה לנו את הכלים להוכיח את המשפט.

אולטרה-פילטר

קודם נגדיר מהו פילטר.

הגדרה – פילטר:

יהי קבוצה ויהי אוסף לא ריק של תת קבוצות של , הוא **פילטר** (filter) על , אם ורק אם:

1. לכל , .
2. אם אזי
3. אם וגם אזי .

הגדרה – אולטרה-פילטר(ultra filter):

פילטר על קבוצה הוא אולטרה-פילטר אם ורק אם אין שום פילטר על המכיל ממש את .

ניתן להגיד אם כן כי אולטרה-פילטר הוא פילטר מקסימלי.

אולטרה-פילטר-ראשי

ברור מסעיף 2 של הגדרת פילטר כי החיתוך של כל שני קבוצות השייכות לפילטר שייך גם לפילטר, אך השאלה שאפשר לשאול מה קורה לחיתוך של כל הקבוצות בפילטר האם גם הוא שייך לפילטר? מקרה זה אינו מחייב, נראה עוד מאט דוגמא כזו, אך קודם נבחן מה קורה אם אכן החיתוך הכללי אכן שייך לפילטר.

יהי פילטר ,אם אכן החיתוך של כל הקבוצות שייך ל אזי קיימת קבוצה A שהינה החיתוך של כל קבוצות הפילטר, בנוסף מהגדרת פילטר כל קבוצה שA מוכלת בה גם שייכת לפילטר, ואם כן ניתן לראות במקרה זה את הפילטר כמוגדר מA ז"א הפילטר הינו פשוט כל הקבוצות המכילות את A.

אם נעבור עכשיו לאולטרא פילטר, היות ומדובר על פילטר המוגדר על ידי A ז"א כל הקבוצות המכילות את A נמצאות גם בפילטר, אבל מצד שני אולטרא פילטר הוא פילטר מקסימלי הרי שאם ניקח את הקבוצה כך שx שייכת לA. וניקח את הפילטר . הרי ש-מכיל את הפילטר, ולכן כדי ש יהיה אולטרה-פילטר צריך שA יהיה סינגלטון ז"א קיים יחיד כך ש.

ולכן בעצם מצאנו שאם קיימת קבוצה השייכת לאולטרה פילטר שכל קבוצות הפילטר מכילות אותה אזי האולטרא פילטר הינו בעצם כל הקבוצות המכילות נקודה מסויימת.

במקרה זה אנו קוראים לאולטרה פילטר – ראשי ונסמנו על ידי

קומפקטיפציית סטון-צ'ך

לפני שנעמיק בנושא זה נצטרך לעבור דרך כמה הגדרות.

ראשית- מרחב האוסדורף

הגדרה – מרחב האוסדורף

מרחב הוא מרחב האוסדורף אם"ם לכך ב *, קיימוץ קבוצות פתוחות ו*  כך ש- וכן וגם .

מרחב האוסדורף מסומן גם ב

הגדרה – תכונת החיתוך הסופי:

משפחה לא ריקה של תת-קבוצות של קבוצה היא בעלת תכונת החיתוך הסופי(finite intersection property), אם ורק אם החיתוך של כל מספר סופי של קבוצות מתוכה אינו ריק.

הגדרה קומפקטיות:

מרחב טופולוגי הוא **קומפקטי**(compact). אם ורק אם לכל כיסוי פתוח של יש תת-כיסוי סופי.

משפט שיבוא לעזר בהמשך-

משפט-

מרחב קומפקטי אם ורק אם מתקיים שלכל משפחה  *של קבוצות* ***סגורות*** *ב**, שהיא בעלת תכונת החיתוך הסופי מתקיים: .*

*הוכחה:*

*כוון אחד:-*

*נניח כי X קומפקטי ונוכיח- כי כי לכל* משפחה  *של קבוצות* ***סגורות*** *ב**, שהיא בעלת תכונת החיתוך הסופי מתקיים: .*

*קומפקיפיקצייה*